REGULARITZACIÓ DEL PROBLEMA DELS TRES COSSOS I ABAST QUE ELLA ASSOLEIX

I. GENERALITATS SOBRE LA INTEGRACIÓ DE LES EQUACIONS DIFERENCIALS ORDINÀRIES

Sigui t una variable independent, i siguin $x_1, x_2 \ldots, x_n$ funcions incògnites de la t, les quals han de verificar un sistema d'equacions diferencials de la forma:

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i\,(x_1, x_2 \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2 \ldots, n)$$

en les quals els segons membres són funcions conegudes de les x i de t.

Integrar el sistema ha significat sempre, des de la invenció del Càlcul fins avui, caracteritzar d'alguna manera les funcions incògnites $x_i(t)$. La més encertada manera de realitzar-ho pot variar segons la natura específica de la qüestió que s'estudia. Però els mètodes analítics de què es disposa s'han anat multiplicant i afinant.

Primerament es considerava com a criteri únic d'integració el de substituir, tant com fos possible, les equacions diferencials (I) per altres tantes relacions en termes finits entre les x_i i la t, expressades mitjançant les anomenades transcendents elementals, i així la discussió dels valors de les funcions $x_i(t)$ quedava reduïda a un problema menys elevat, això és, la resolució d'equacions en termes finits. Amb tal procés s'aconseguí en certs casos caracteritzar d'una manera acabada les incògnites, però en altres, no es fa altra cosa que enretirar la dificultat; i, sobretot, és limitadíssima la classe d'equacions integrables amb transcendents elementals, per la qual cosa resulta evident que la qüestió s'ha d'abraçar d'una altra manera.

Ja els analistes del segle XVIII havien assajat desenrotllaments en sèrie i procediments aproximats, mes és precís arribar a Cauchy per a la demostració del teorema d'existència, la qual implica un tractament sistemàtic del problema *local*, és a dir, la construcció d'un algoritme apte a representar sota forma de sèrie les funcions $x_i(t)$ als vols de t, és a dir, en un entorn prou petit de valors de t.

D'una manera precisa (referint-nos, per a fixar les idees, al camp de les funcions analítiques), si els segons membres X_i són funcions regulars de tots llurs arguments al volt de certs valors qualssevol $x_i^{(o)}$, t_o, el teorema d'existència sosté que hi ha una solució, i sols una, definida pels valors inicials $x_i^{(o)}$, t_o, és a dir, un sol sistema de funcions $x_i(t)$ que verifiquin la (I), que siguin regulars per a valors de t veïns de t_o, i, finalment, que per $t = t_o$ es facin iguals als valors donats a priori $x_i^{(o)}$.

Si les funcions X_i presenten singularitats, fins el simple estudi local de les integrals és considerablement difícil; i, malgrat els clàssics resultats de Briot i Bouquet, Fuchs, Poincaré i Picard, sols es coneixen certs aspectes particulars, encara que notables, de la qüestió.

Tornem a un entorn en el qual les funcions X_i són regulars. Una solució determinada pels seus valors inicials pot ésser definida per a valors de t veïns de t_o, però ço que interessa, restant en la consideració de valor reals, és conèixer-la per a valors qualssevol de t entre $-\infty$ i $+\infty$, o, almenys, conèixer tot el camp d'existència de la solució.

Un estudi global d'aquesta manera és, per regla general, molt difícil, i en els problemes d'interès conexe s'hi arriba cas per cas amb criteris particulars diversos (generalment partint d'expressions formals dels integrals ja coneguts). Poincaré, en les seves recerques memorables sobre corbes definides per equacions diferencials, ha obert noves vies a la investigació; però són encara poques les classes de sistemes diferencials per a les quals es pot arribar al fi desitjat.

La major dificultat prové, com s'ha dit, de les eventuals singularitats dels segons membres de la (I). Posem-nos, de moment, en el cas més favorable en el qual les singularitats no destorbin, i vejam fins on es pot arribar. Les X_i es mantenen per hipòtesis regulars i inferiors a un número donat M, qualssevol que siguin els valors de les x_i en un cert camp Γ, i els de t en una franja del mateix pla de variable imaginària, franja que comprèn enterament l'eix real i té una amplada mínima a, és a dir, que abraça l'àrea compresa entre dues paral·leles a l'eix real que disten a entre elles. Suposem, encara, que se sap, d'una manera o altra, que tota solució $x_i(t)$ de les (I) determinada a partir de $t = t_0$, per valors inicials $x_i^{(0)}$ continguts en un cert camp Γ' dintre de Γ, no pot sortir de Γ' al variar t al llarg de l'eix real. Està demostrat que, en tal cas, les $x_i(t)$ són funcions regulars de t de $-\infty$ a $+\infty$.

Es tracta d'un corol·lari fàcil del teorema d'existència en el qual val la pena de fixar-se un moment. Que Γ' estigui dintre de Γ voldrà dir que, qualssevol que siguin els valors $x_i^{(0)}$ dins Γ' existeix un entorn $| x_i - x_i^{(0)} | \leq b$ (essent b constant), el qual entorn està contingut dins Γ.

Amb tals hipòtesis i condicions, sigui T el més petit dels dos números a i $\frac{b}{M}$. El teorema d'existència permet afirmar que tota solució $x_i(t)$ és, a partir d'un valor real determinat de t, prolongable analíticament dintre d'un cercle de radi T, en particular per $\pm$ T al llarg de l'eix real. Aquest eix pertany, doncs, tot sencer al camp de regularitat de les funcions $x_i(t)$, i en particular queda dins de l'estrella de Mittag-Leffler d'una x_i relativa a qualsevol dels seus punts. Per això les $x_i(t)$ són, en tal cas, representables en sèries de polinomis de t convergent uniformement al llarg de l'eix real.

Com es veu, almenys des del punt de vista matemàtic de representar la funció amb algoritme convergent, s'és arribat a abraçar tot el camp real d'existència passant del local al global.

Amb això no queda assolida la caracterització completa dels integrals que permet donar-se compte de les variacions qualitatives, de la periodicitat, estabilitat, caràcter asimptòtic, etc., als quals estudis, per llur gran importància d'aplicació i de concepte, van endreçats, des de Poincaré, els esforços i estudis dels geòmetres. Però aquesta part tan interessant ve subordinada al camp de regularitat dels segons membres X_i. Per això pot dir-se doblement privilegiada la categoria de sistemes que romanen regulars en el camp real, i queda patent l'interès que hi ha a reduir el sistema diferencial que presenta singularitat a un altre que no en tingui. En això consisteix la *regularització*.

2. PROBLEMA DELS TRES COSSOS. RESUM DE LES RECERQUES SOBRE LA CONDICIÓ DE XOC.

Ofereix un exemple adequat d'aquesta categoria de sistemes regularitzables el problema famós dels tres cossos. Es tracta, com és ben sabut, del moviment de tres punts materials O, P, P' sotmesos a l'atracció mútua que formula la llei de Newton.

Les equacions diferencials del moviment, en una qualsevol de llurs formes clàssiques, es comporten sempre regularment en el camp real, mentre les posicions dels tres cossos són distintes, i presenten, en canvi, singularitats quan vénen a coincidir dos dels tres cossos o tots tres alhora.

L'estudi analític del comportament del sistema als volts d'un xoc va ésser iniciat per Painlevé, fa uns trenta anys. Va ésser aleshores demostrat per via rigorosa ço que sembla intuïtiu, això és, que *si pel valor* t_1 *del temps* t *el moviment no es manté regular, necessàriament o bé una de les tres distàncies es fa nul·la o totes tres alhora s'hi fan.*[1]

D'aquests estudis, Painlevé[2] en deduí que les condicions de xoc de dos cossos eren expressables, segons tota probabilitat, per dues relacions uniformes entre les coordenades i les components de la velocitat dels tres cossos, i que, en el cas particular del problema pla, era prou una única condició, reduint-se l'altra a una identitat.

Aquestes indicacions de Painlevé em portaren a fer un estudi del moviment als volts immediats d'un xoc, limitant-me, per a concentrar l'esforç en els fronts essencials, al cas més senzill del problema restringit.[3]

Es tracta, com se sap, d'un cas particular del problema pla en el qual un dels tres cossos, vg. P, té una massa indefinidament petita fins al punt de no tenir influència en el moviment dels altres cossos O i P'. Es

1. Com es veu, queda exclosa l'eventualitat, possible *a priori*, si bé poc d'acord amb la intuïció física, que dos cossos puguin acostar-se tant com es vulga sense caure l'un sobre l'altre o bé sense que la distància mútua sigui sempre decreixent.

2. *Leçons*, etc. ... *professées à Stockholm*. (París, Hermann, 1897; pàgs. 582, 586.)

3. *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi*. (*Ann. di Matematica*. Sèrie III, tom IX. 1903. Pàgs. 1-32.)

suposa que O i P′ es mouen de la més senzilla manera compatible amb la llei de Newton, és a dir, que roden uniformement entorn del centre de gravetat comú G.

El problema es pot referir a l'estudi del moviment de P en el pla en què es mouen O i P′ per l'acció mútua que els atrau.

En el cas del problema restringit no hi ha altre xoc possible que el de P amb O o amb P′.

El xoc té lloc sempre segons una direcció ben determinada, és a dir, considerant un xoc en el moment t_1, entre O i P per exemple, si s'anomenen r i θ les coordenades polars de P respecte de O no solament

$$\text{lím. } r = o \quad \text{per } t = t_1$$

com resulta dels estudis de Painlevé, sinó que també existeix un límit θ_1 per θ. La velocitat v es fa infinita, mes

$$\sqrt{r}\, v$$

és finita; propietats, totes elles, perfectament establertes i demostrades.

Transformant el sistema diferencial i tenint en compte certes recerques sobre les singularitats polars, pot posar-se en forma explícita la condició de xoc, que és única i uniforme, com havia afirmat Painlevé.

Poc temps després, Bisconcini[1] envestí sobre la base de principis semblants l'estudi del xoc binari pel problema general dels tres cossos, arribant a donar en forma explícita dues relacions uniformes característiques del xoc, i així va quedar plenament confirmada la indicació de Painlevé.

Per altra part[2] Sundman, examinant el cas d'un

1. *Sur le problème des trois corps.* (*Acta Math.* Tom 30. 1906. Pàgines 49-92.)

2. *Recherches sur le problème des trois corps.* (*Acta scientiarum Societatis Fennicae.* Tom XXXIV. N. 6. Helsingfors. 1907.)

xoc general, pogué demostrar que és condició necessària, perquè això esdevingui, que s'anul·li el moment resultant de la quantitat de moviment dels cossos. És aquest moment $\mathfrak{M}$ un vector global necessàriament constant per a tota la durada del moviment d'un sistema material qualsevol subjecte a forces internes solament, com succeeix en el cas del problema dels tres cossos.

Si les condicions inicials són tals que $\mathfrak{M}$ no és nul, es pot considerar fora d'examen l'eventualitat d'una col·lisió general, i, per conseqüència, les úniques singularitats locals que cal tenir en compte són els tres xocs binaris.

Sembla que Weierstrass havia reconegut l'abast de la restricció $\mathfrak{M} \neq o$ en l'estudi analític del problema dels tres cossos[1] però és de justícia atribuir la proposició a Sundman, que no solament la retrobava, sinó que en publicava la demostració i en treia partit sistemàtic.

3. PRIMERA REGULARITZACIÓ ASSOLIDA. RESULTAT FONAMENTAL DE SUNDMAN.

Aquests aventatges dugueren la confiança que les singularitats analítiques corresponents al fenomen de xoc són, en realitat, menys formidables del que fou temut des d'un principi. I, en efecte, al cap de poc temps vaig trobar que, almenys en el problema restringit, el xoc binari és regularitzable amb mitjans singularment senzills : resultats que varen ésser comunicats al Congrés de Matemàtics de Heidelberg en 1904, i exposats, amb llurs conseqüències, en una Memòria de les *Acta Math.* (T. 30, 1906; pàgs. 305-327).

1. *Zur Biographie von Weierstrass. (Acta Math.* Tom 35. 1911. Pàg. 30.)

Com se sap, correspon a Sundman el mèrit d'haver regularitzat per primer cop, de manera completa, el problema dels tres cossos. El treball[1] obtenia en 1913 el premi Pontécoulant de l'Acadèmia de Ciències de París i va fer gran efecte entre els matemàtics. Transcendia àdhuc al gran públic, que fou assabentat que era trobada la solució del famós problema dels tres cossos, cercada en va des de Newton.

Les consideracions preliminars fetes en parlar dels sistemes d'equacions diferencials indiquen en quin sentit és permès parlar de problema *resolt*, ensems que assenyalem quines i quantes qüestions estan encara per resoldre, si bé la majoria estan subordinades a la primordial regularització de què ens ocupem.

Sobre l'abast d'aquest pas indiscutiblement essencial em proposo retornar més endavant. Fixem-nos, per ara, en els mitjans aptes a la seva realització. La via seguida per Sundman era indirecta : necessita la introducció d'un nombre, més aviat gran, de variables auxiliars i càlculs poc elegants, per donar lloc a un sistema regularitzat que no entra en l'àmbit de les equacions de la dinàmica; i això constitueix un inconvenient greu, perquè ja no és permès (almenys sense discussió preliminar) l'aplicar a tals sistemes els resultats teòrics ni els mètodes de càlcul de la mecànica analítica.

Pel problema pla he aconseguit una regularització dels xocs binaris verament dinàmica i que conserva tots els aventatges del sistema d'origen, fins comprenent-hi la forma canònica.[2]

En substància és la mateixa transformació que abans

1. *Mémoire sur le problème des trois corps.* (*Acta Math.* Tom 36. 1912. Pàgs. 105-179.)
2. *Rend. dei Lincei.* Vol. XXIV (2.º semestre 1915), pàgines 61-75.

d'ésser coneguts els treballs de Sundman m'havia permès regularitzar el problema restringit. Per la seva gran senzillesa l'exposaré aquí.

4. PROBLEMA PLA. LEMES DE COMPORTAMENT ANALÍTIC.

Considerem, en el pla dels tres cossos, un sistema d'eixos O x_1 x_2 amb l'origen mòbil col·locat en el punt O, però de direcció invariable.

Siguin x_1, x_2 i x'_1, x'_2 les coordenades de P i P' referides a aquests eixos, i siguin p_1, p_2 i p'_1, p'_2 les components de les quantitats de moviment respectives, amb referència al centre de gravetat G de la terna, i així $-(p_1 + p'_1)$, $-(p_2 + p'_2)$ seran les components de la quantitat de moviment de O.

Diguem m_0, m, m' a les masses de O, P, P'; r, r', Δ a les tres distàncies OP, OP', PP'; f a la constant d'atracció universal. Amb tal nomenclatura la funció de forces és

$$U = f\left\{ \frac{m_0 m}{r} + \frac{m_0 m'}{r'} + \frac{m m'}{\Delta} \right\},$$

funció holomorfa de x_1, x_2, x'_1, x'_2 en tot el camp real d'aquests arguments menys per valors nuls de r, r' o Δ.

Escrivin

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) \qquad \text{(Força viva de P)}$$

$$\mathfrak{T}' = \frac{1}{2m'}(p'^2_1 + p'^2_2) \qquad \text{(Id. de P')}$$

$$\mathfrak{T}_o = \frac{1}{2m^o}\left\{(p'_1 + p'_1)^2 + (p_2 + p'_2)^2\right\} \qquad \text{(Id. de O)}$$

$$T = \mathfrak{T} + \mathfrak{T}' + \mathfrak{T}_o, \qquad H = T - U.$$

La funció H ho serà de les quatre coordenades x_1, x_2, x'_1, x'_2 i de les quatre components de la quantitat de moviment baricèntriques p_1, p_2, p'_1, p'_2; la qual funció no té més singularitats que les ja assenyalades respecte de U i amb valors infinits eventuals de la velocitat, és a dir, de p_1, p_2, p'_1, p'_2.

Les equacions del moviment en la forma canònica de Poincaré es poden escriure

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_j}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_j} \\[2ex] \dfrac{dp_j}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2)\,, \end{cases}$$

amb altres semblants relatius als valors accentuats. Són, com es veu, un sistema normal. Els segons membres són derivats de H, i, per tant, vénen afectats de singularitats locals quan s'anul·len r, r' o Δ o quan les velocitats es fan infinites. Això últim és conseqüència de l'anterior, perquè el teorema de forces vives

$$H = \text{Constant}$$

o sia

$$T - U = \text{Const}$$

demostra que, mentre el límit inferior de les distàncies mútues sigui diferent de zero, com que U és finita, també ho és T, i, per tant, tota vegada que T és forma quadràtica definida, també és finita cadascuna de les p.

Per altra part, com s'ha dit abans, en el cas en què $\mathfrak{M}$, moment resultant de les quantitats de moviment, no sigui zero, queda exclosa una col·lisió general. Si es considera un xoc binari, per exemple, entre P i O, es pot demostrar, com a conseqüència de determinades consideracions respecte al comportament qualitatiu de la dita singularitat, el conjunt de propietats que vénen referides tot seguit i que no són sinó l'expressió sota forma analítica precisa del que suggereix immediatament la intuïció mecànica del xoc entre dos cossos en presència d'un tercer que roman estrany al fenomen. A saber[1]:

a) En acostar-se t al moment del xoc t_1

$$\text{lím. } r_{(t=t_1)} = 0 \,.$$

b) La posició i la velocitat baricentral del tercer cos P′ i, per tant, les quatre variables que li corresponen x' p', convergeixen a límits finits determinats per $t \to t_1$. És a dir

$$\text{lím. } r'_{(t=t_1)} = \text{lím. } \Delta_{(t=t_1)} > 0 \,.$$

c) La fracció $\dfrac{1}{r}$ és infinita per $t = t_1$ segons expressa la condició *a)*, però resta integrable, de tal manera que, *posant*

$$du = \frac{dt}{r}$$

queda definit, llevat d'una constant additiva, *un paràmetre* u *que creix sempre amb* t *i convergeix cap a un valor finit* u_1 *quan* $t \to t_1$.

d) $$\text{lím. } r\mathfrak{T}_{(t=t_1)} = \text{lím. } r\,\frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2)_{(t=t_1)} = fm_0 m \,,$$

propietat que es dedueix de la integral de forces vives multiplicant per r i passant al límit.

1. *Sur la régularisation du problème des trois corps. (Acta Math.* Tom 42. 1918. Pàgs. 99-143, cap. I.)

5. REGULARITZACIÓ CANÒNICA DEL PROBLEMA PLA

Tot això establert, observi's que les equacions diferencials (1) no alteren afegint a H una constant qualsevol. Per altra part, les (1) aquelles admeten, com ja s'ha observat, la integral de forces vives $H = \text{Constant}$. Designant per E la constant del segon membre i fixant l'atenció en la categoria de solucions que corresponen a un valor ben determinat de E (però, altrament, qualsevol), podem imaginar substituït $H - E$ per H en les equacions (1). Això té l'aventatge (que aprofitarem aviat) que $H - E$ s'anul·la al llarg de qualsevol de les solucions de què es tracta. Per tant, si s'anomena α a un qualsevol dels arguments x_j, p_j, x'_j, p'_j, si alhora s'escriu

$$(2) \quad H^* = r(H - E) = r\mathfrak{T} + r(\mathfrak{T}' + \mathfrak{T}_o) - rU - rE$$

(no sortint de la categoria de solucions que es consideren) i si, finalment, en lloc de t s'introdueix la variable independent u definida en l'apartat *c)*, el sistema diferencial (1) esdevé

$$(1') \quad \begin{cases} \dfrac{dx_j}{du} = \dfrac{\partial H^*}{\partial p_j} \\[2ex] \dfrac{dp_j}{du} = -\dfrac{\partial H^*}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2) \end{cases}$$

amb altres operacions semblants relatives a lletres accentuades. Aquest sistema compta amb la integral $H^* = \text{Constant}$, però sols interessa la categoria de solucions per a la qual $H^* = 0$, que correspon a la del sistema (1) en què $H = E$.

La senzillíssima transformació amb la qual s'ha fet el pas de (1) a (1') va ésser introduïda per mi fa uns vint any a propòsit del problema restringit. Pot qualificar-se de transformació Darboux-Sundman, perquè afegeix el criteri de fixar E usat per Darboux en l'estudi de les trajectòries, amb la transformació de variable independent adoptada per Sundman. Si es conserva l'estructura analítica de la funció H* en acostar-se un xoc binari entre P i O, es veu tot seguit que l'ús de la H* ofereix positius aventatges. En efecte : els infinits han desaparegut, perquè la multiplicació per r l'ha feta desaparèixer del terme $f\dfrac{m_0 m}{r}$ de U, i, per ço que deixem establert en l'apartat *d)*, també el terme $\mathfrak{T}$ de T queda arranjat a bastament.

Però encara no es pot parlar de funcions regulars respecte de totes les variables, perquè, entrant-hi r, presenta la funció H* un punt crític respecte a x_1, x_2 pels valors nuls d'aquestes variables, i, demés, en virtut de *d*), $p_1^2 + p_2^2$ creix indefinidament, de manera que fins respecte a les variables p_1, p_2 el xoc no queda inclòs en el camp de regularitat.

Una transformació ulterior en la qual intervenen solament les quatre variables $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$, elementalíssima, permet la regularització de manera completa *tot i conservant la forma canònica del sistema diferencial.*

Basta substituir 1) a x_1, x_2 dues variables noves lligades amb les primeres per la relació complexa

$$(3) \qquad x_1 + ix_2 = (\xi_1 + i\xi_2)^2$$

i 2) a les p_1, p_2 dos arguments nous π_1 i π_2, tals que

$$(4) \qquad p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 = \pi_1\,d\xi_1 + \pi_2\,d\xi_2$$

sigui una identitat, havent en compte la (3).

La condició 4), de la qual se'n podrien deduir les expressions explícites de π_1 i π_2, és tal, que en les noves variables ξ_1, ξ_2, π_1 i π_2 les equacions conserven la forma canònica.

En forma més concreta, es pot posar:

$$(5) \qquad p_1 + ip_2 = \frac{\pi_1 + i\pi_2}{2(\xi_1 - i\xi_2)} \, .$$

La 4) resulta, així, una conseqüència evident de la (3) i de la (5), obtinguda diferenciant la primera, canviant en la segona i en $-i$ i multiplicant membre a membre.

De les equacions (3) i (5), se'n dedueix també, observant que r és el mòdul de $x_1 + ix_2$ i anomenant ρ el mòdul de $\xi_1 + i\xi_2$,

$$(6) \qquad r = \rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 \, ;$$

i de (5) igualant els quadrats dels mòduls

$$(7) \qquad p_1^2 + p_2^2 = \frac{\pi_1^2 + \pi_2^2}{4\,\rho^2} \, .$$

Multiplicant els dos membres de (5) per

$$r = (\xi_1 + i\xi_2)(\xi_1 - i\xi_2),$$

s'obté

$$(8) \qquad r(p_1 + ip_2) = \frac{1}{2}\,(\pi_1 + i\pi_2)\,(\xi_1 + i\xi_2) \, .$$

D'aquesta última, igualant els quadrats dels mòduls, surt:

$$\frac{r}{2m}(p_1^2 + p_2^2) = \frac{\pi_1^2 + \pi_2^2}{8m} = fm_0m$$

la qual demostra que $\pi_1^2 + \pi_2^2$ roman finit quan els dos cossos P i O tendeixen al xoc; i això, tenint present la circumstància de tendir la direcció OP a un límit ben determinat, assegura que π_1 i π_2 tenen, cadascun, límits perfectament determinats alhora.

De les equacions (3), (6), (7) i (8) resulta que x_1, x_2, r, $r(p_1 + p^2)$, rp_1, rp_2 són totes funcions de segon grau de les noves variables ξ_1, ξ_2, π_1 i π_2, quedant assegurada la regularitat d'aquelles als volts de $\xi_1 = o$, $\xi_2 = o$ i d'aquells valors finits de π_1 i π_2 que corresponen a un xoc.

Si ara s'observa que $\dfrac{1}{r'}$ i $\dfrac{1}{\Delta}$ són regulars als volts d'un xoc, tant respecte a x_1, x_2 com a x'_1, x'_2, és natural que aquest caràcter sigui conservat substituint ξ_1 i ξ_2 a x_1 i x_2. En el valor de

$$H^* = r\,(T - U - E)$$

les variables x_1, x_2, p_1, p_2 intervenen solament per haver-hi r i $r\,(p_1^2 + p_2^2)$ en l'expressió de $\mathfrak{T}$ i per haver-hi rp_1 i rp_2 en el valor de $\mathfrak{T}_0$. Per tant, és assolida la regularització completa de H* i, per consegüent, del sistema diferencial relatiu a les noves variables, que resta canònic amb la funció característica H* expressada en termes de les noves variables : sistema que es pot escriure

$$\frac{d\xi_j}{du} = \frac{\partial H^*}{\partial \pi_j}\,, \quad \frac{dx'_j}{du} = \frac{\partial H^*}{\partial p'_j}$$
$$\frac{d\pi_j}{du} = -\frac{\partial H^*}{\partial \xi_j}\,, \quad \frac{dp'_j}{du} = -\frac{\partial H^*}{\partial x'_j} \quad (j = 1, 2)\,.$$

6. EL PROBLEMA EN L'ESPAI. ESPÈCIES VÀRIES D'ELEMENTS EL·LÍPTICS.

Si del problema pla es passa al cas de l'espai, les fórmules cartesianes conserven el mateix aspecte, però augmenta en dos el nombre de graus de llibertat, intervenint-hi cadascun dels dos cossos P i P' una coordenada de més, x_3 i x'_3 respectivament, i amb elles les quantitats de moviment p_3 i p'_3. Conservant per a r, r' i Δ els significats ja coneguts de distàncies mútues, es podrà escriure ara:

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$$

$$\mathfrak{T}' = \frac{1}{2m'}(p'^2 + p'^2_2 + p'^2_3)$$

$$\mathfrak{T}_0 = \frac{1}{2m_0}\left\{(p_1 + p'_1)^2 + (p_2 + p'_2)^2 + (p_3 + p'_3)^2\right\}.$$

A les T, U, H se'ls conservarà el significat ja conegut.

Durant un cert temps vaig estar buscant la manera d'adaptar a l'espai la transformació elemental

$$x_1 + ix_2 = (\xi_1 + i\xi_2)^2$$

que *permet tan senzillament la regularització en el pla*. Creia, demés, que no havia de renunciar a l'assaig d'una transformació en la qual intervingués tan sols x_j i p_j, sense cap intervenció dels elements que defineixen la posició i el moviment de P'.

Per altra part, la regularització ja aconseguida de Sundman donava una certa confiança, si no garantia, que havia d'haver-hi per al problema general una regularització mecànica intrínseca. Era, doncs, justificat insistir en la temptativa de trobar-la.

Però a res no pogueren conduir-me les transformacions purament puntuals, és a dir, tals que x_1, x_2, x_3 fossin substituïdes per la terna de noves variables ξ_1, ξ_2, ξ_3 i amb les conjugades definides per la relació diferencial

$$(9) \quad p_1dx_1 + p_2dx_2 + p_3dx_3 = \pi_1d\xi_1 + \pi_2d\xi_2 + \pi_3d\xi_3 .$$

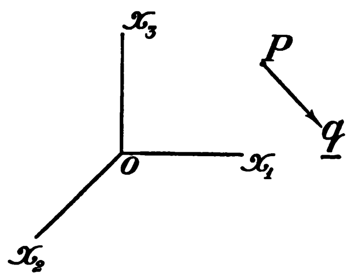
De manera que, no sortint-ne amb les transformacions purament puntuals, recorria a altres de més generalitat, sempre entre les de contacte, és a dir, a transformacions entre (x_j, p_j) i les noves (ξ_j, π_j) que verifiquen la (9). Ho són, per exemple, les transformacions que ofereix el mètode d'integració de Jacobi, i en particular la transformació clàssica o una de les seves variants introduïdes per Poincaré, que passa de les x_j, p_j a les anomenades *variables keplerianes,* les quals tenen un sentit precís relativament a l'òrbita el·líptica osculatriu, el focus de la qual és O i que defineixen els valors instantanis de las x_j, p_j.

Però cap de les transformacions referents al moviment el·líptic és regularitzant per al problema dels dos cossos P, O, ni menys per al xoc binari en el problema dels tres cossos.

En el cas del moviment parabòlic, en canvi, el mètode de Jacobi permet trobar una transformació regularitzant als volts de O.

No és difícil de compendre el significat geomètric i cinemàtic de les noves variables (ξ_j, π_j) que vindran a substituir a les (x_j, p_j).

Sigui un instant determinat t, i consideri's en tal ins-



tant el punt P i el vector $\underline{q}$ definits respectivament per les coordenades x_j i les components p_j relatives a l'instant t. El vector $\underline{q}$ representa la quantitat de moviment de P referida al centre de gravetat G dels tres cossos, si amb la mateixa lletra $\underline{q}$ designarem la llargada del mateix. Sigui un moviment hipotètic, que serà dit *intermediari* o bé, encara que impròpiament, osculador, en el qual 1) $\underline{q}$ sigui la quantitat de moviment de P en l'instant t, referida a O en lloc de a G, 2) la força sobre P és l'atracció provinent de O, segons el potencial

$$\frac{fm_0 m}{r}.$$

Per als planetes i alguna volta per als cometes,

$$\mathfrak{T} - \frac{fm_0 m}{r} = \frac{1}{2m} q^2 - \frac{fm_0 m}{r} < 0.$$

Si la mateixa condició fos vàlida per al moviment intermediari, aquest fóra el·líptic keplerià i podria oferir-nos transformacions de les x_i, p_i en elements keplerians, sobre els quals hem dit ja alguna cosa.

Però la referència del fenomen real a moviments hipotètics en els quals tant P com $\underline{q}$ tinguin els mateixos valors en l'instant escollit t, pot fer-se de molt diverses maneres. Una d'aquestes fóra, per exemple, la següent, per al cas d'ésser negativa la constant E, que és l'energia total del moviment real. L'equació de forces vives seria

$$\frac{1}{2m} q^2 - \frac{k}{r} = \mathrm{E}$$

en la qual fórmula r i q són conegudes en l'instant t, E també, i k ve definida per l'expressió anterior. En resultaria un moviment intermediari amb la mateixa energia total E que el moviment real, però amb diferent valor de la constant d'atracció, que aquí és k en lloc de $f\ m\ m_0$. Els elements el·líptics corresponents s'anomenen *isoenergètics*, a diferència dels ordinaris, que poden qualificar-se d'*isodinàmics*. Aquests elements isoenergètics no són regularitzants, però presenten, en certs casos, determinats aventatges pel fet d'introduir com a variable canònica l'anomalia excèntrica en lloc de l'anomalia mitja, que és la que figura clàssicament entre els isodinàmics, substitució particularment interessant per a alguns tipus de pertorbacions.(1)

7. TRANSFORMACIÓ CANÒNICA DEDUIDA DEL MOVIMENT PARABÒLIC. REGULARITZACIÓ D'UN XOC BINARI.

Un moviment fictici que no utilitza elements isoenergètics ni isodinàmics, però que respon al criteri que l'òrbita intermediària sigui *parabòlica*, resulta de definir la constant d'atracció per la fórmula

$$\frac{1}{2m} q^2 - \frac{k}{r} = 0 \ .$$

La constant de forces vives és nul·la, la qual cosa tradueix la condició característica perquè el moviment central newtonià sigui parabòlic. Admetem, doncs, el valor de k que resulta de la fórmula anterior per als valors r i q del punt P en l'instant t. La paràbola intermediària (que passa per P i és tangent al vector $\underline{q}$ en el punt P) tindrà el focus en O. Sigui p el paràmetre de la paràbola i c la constant d'àrees, és a dir el doble de la velocitat aerolar relativa al moviment hipotètic.

Poden definir-se dos vectors, un Ξ de llargada $\xi = 2km$, dirigit del focus al vèrtex; altre H, paral·lel a $\underline{q}$, de llargada $\pi = \dfrac{r}{\xi} q$. Siguin ξ_i, π_i les components d'aquests dos vectors.

1. Cfr. *Nuovo Sistema canonico di elementi ellittici. (Ann. di Mat.* Sèrie III, tom. XX. 1913. Pàgs. 153-170. Volum dedicat a la memòria de Lagrange.)

Per abreviar, serà escrit

$$-\frac{1}{2}W = \sum_{1}^{3}{}_j\xi_j\pi_j,$$

i així les relacions entre les (x_j, p_j) i les (ξ_j, π_j) poden adoptar la forma

$$(10)\qquad \begin{cases} x_j = \pi^2\xi_j + W\pi_j \\ p_j = \dfrac{\pi_j}{\pi^2} \end{cases} \qquad (j = 1, 2, 3)\,.$$

Aquestes fórmules defineixen una transformació de contacte, perquè, segons el valor de W, la relació (9) és verificada.

En acostar-se P indefinidament a punt O, la llargada de $\underline{q}$ es fa indefinidament gran. Però el producte rq^2 resta finit i diferent de zero.

Havent introduït Ξ com a vector de llargada $2k = \dfrac{1}{m}rq^2$, podem afirmar que les tres components ξ_1, ξ_2, ξ_3 tendeixen a límits finits i determinats en el moment del xoc. Les π_j, per al mateix instant, són zero, ja que, en acostar-se el xoc, la llargada $\pi = \dfrac{rq}{\xi}$ tendeix a zero.

I és interessant remarcar que no solament les x_j són, totes, funcions regulars de les ξ_j, π_j als volts d'un xoc, és a dir, per valors zeros de les π_j i valors, no tots nuls, de es ξ_j, sinó que també succeeix el mateix per a

$$(11)\qquad \begin{cases} r = \xi\pi^2 \\ rp_j = \xi\pi_j \\ r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \xi\,. \end{cases}$$

D'això es dedueix, d'una manera semblant a ço que hem deixat estatuït per al cas del pla, que la funció característica H^* i, per tant, el sistema diferencial queden regularitzats amb la indicada transformació.

8. PARÀMETRE SIMÈTRIC. REGULARITZACIÓ COMPLETA.

Fins aquí s'ha tractat la regularització d'un xoc binari PO. Consideracions semblants poden ésser repetides per als altres tipus de xocs PP', P'O, adoptant les transformacions corresponents. Per al xoc PO s'ha fet servir no solament la transformació de contacte esmentada, sinó també un camvi de variable independent, de manera que, en lloc de t, s'introduïa .a nova variable u definida per a

$$du = \frac{dt}{r} \,.$$

Observant que el producte

$$rU = fm_0m + \frac{fm_0m'}{r'}r + \frac{fmm'}{\Delta}\,r,$$

considerat com a funció de les variables transformades ξ_i, π_i, així com de les x', és regular als volts i fins en el moment del xoc, sense anul·lar-se, es podrà encara substituir a u la nova variable τ definida per

$$d\tau = rUdu \tag{12}$$

sense comprometre per a res la regularització. Aquesta variable nova τ creix constantment amb u i, per tant, amb t, convergint cap a un valor finit per l'instant del xoc $t = t_1$, a la manera mateixa de u.

Entre el nou paràmetre τ i el temps t hi ha la relació

$$d\tau = Udt \tag{12'}$$

en la qual apar evident l'estructura de simetria (respecte dels tres cossos) que té τ en front de u. Si en les fórmules (1) es posa τ en lloc de u, i per a simplificar s'escriu

$$F = \frac{1}{rU} H^*$$

o sia per (2)

$$F = \frac{1}{U}(H - E), \tag{13}$$

el sistema (1), en el qual F, de la mateixa manera que H^*, s'entén tenir el valor o, serà novament:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx_j}{d\tau} &= \frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial x'_j}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial p'_j} \\ \frac{dp_j}{d\tau} &= -\frac{\partial F}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial p'_j}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial x'_j} \qquad (j = 1, 2, 3). \end{aligned} \right. \tag{14}$$

Amb el nou paràmetre simètric τ no cal modificar la variable independent en procedir a la regularització als volts d'un xoc qualsevol binari, i solament cal la transformació de contacte corresponent, junt amb translacions d'origen de O a P o a P'.

Pel teorema de Sundman respecte de l'anul·lació del moment resultant $\mathfrak{M}$ de les quantitats de moviment, queda exclosa l'eventualitat d'un xoc general, i, en conseqüència, resulta demostrat, així, que el sistema (14) és regular o regularitzable amb senzilles transformacions canòniques de les incògnites : regularització vàlida per a qualsevol valor de τ, i això vol dir del temps, tant si hi ha xocs com si no.

9. EN QUIN SENTIT ES POT DIR RESOLT EL PROBLEMA

Les coordenades dels tres cossos o figuren directament entre les incògnites o bé són expressables com a funcions holomorfes d'altres variables que permeten la regularització, per exemple, per a les primeres fórmules (10). Per tant, *les coordenades dels tres cossos i llurs distàncies mútues així com el temps* (fórmules 12 i 12′) *són funcions del paràmetre* τ *per a tots els valors reals d'aquest*, valors que corresponen biunívocament a tots els valors reals del temps. Aquesta és la conclusió avui ja clàssica de Sundman que tanca tota una categoria de recerques antigues i modernes.

Però si bé la importància del resultat obtingut és molt notable, no es pot negar que la sèrie de polinomis en τ (o altre sèrie semblant), amb els quals es pot representar la solució, té un aspecte àridament quantitatiu, de manera que ni en dóna la manera d'ésser general ni les característiques de major relleu. Fins al punt que, si, per exemple, per $\tau = \tau_1$ hi ha efectivament un xoc, les fórmules que resten vàlides abans del xoc, durant aquest i després, no permeten, sense nova discussió, donar-se'n compte.

10. SIGNIFICAT MECÀNIC DE LA PROLONGACIÓ ANALÍTICA

Les fórmules vàlides per abans o després del xoc poden tenir fins i tot un cert interès astronòmic, encara que les velocitats mitjanes dels cossos sideris siguin bastant superiors a les dels projectils més potents, i sols grosserament comparables els materials.

Mes, en veritat, si es prenen per norma els efectes balístics, pot pensar-se en què el xoc de dos cossos sideris resulti ésser l'aspecte científic d'una catàstrofe : la fi del món, que ha distret llarg temps i distreu encara la fantasia popular. Si el món es fa trossos, el problema del moviment després del xoc presentarà característiques ben diverses de les que són esquematitzables en el problema dels tres cossos i la prolongació analítica serà qualque cosa ben diferent de la realitat.

Però pot fer-se la conjectura, altrament, de què les conseqüències catastròfiques del xoc siguin limitades a les regions en les quals té lloc el contacte, i que l'efecte general sigui un rebot, com succeeix en els cossos perfectament elàstics i en les molècules tals com se les considera en la teoria cinètica dels gasos. Aleshores es pot atribuir un sentit físic perfectament definit al moviment, després del xoc, dels centres de gravetat dels cossos que es topen.

I, en efecte, el professor Armellini[1] ha trobat que a la continuació analítica de Sundman correspon el moviment dels centres de gravetat de dues esferes perfectament elàstiques després del xoc.

Amb això queda justificat i fins imposat per la naturalesa de les coses el criteri analític de fer variar τ incondicionalment de $-\infty$ a $+\infty$, sense deturar-se en xocs eventuals; però són aquests fenómens tan sobresortints en la història del moviment, que no es pot dir que s'hagin integrat fins a la fi les equacions diferencials del problema si no es pot d'una o altra manera saber a priori, per les condicions inicials donades, si el xoc és de témer o no.

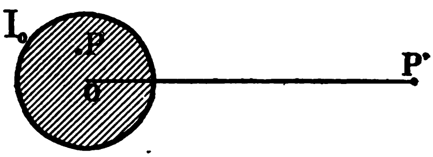
II. PREDICCIÓ A TERMINI BREU. SEGURETAT SECULAR.

Ja s'ha vist com la pregunta sobre quines serien les condicions característiques d'un xoc, porta a l'estudi detingut de la naturalesa de la singularitat corresponent. Obtinguda la regularització local, de manera que als volts

1. *Estensione delle soluzione del Sundman dal caso di corpi ideali al caso di sferette elastiche omogenee. (Rend. delle R. Acc. dei Lincei.* Vol. XXIV [primo semestre 1913], pàgs. 185-190.)

d'un xoc en un cert entorn D tots els elements integrals del sistema diferencial són holomorfes, la construcció efectiva de les condicions de xoc no presenta cap dificultat, ni de concepte, ni formal, ja que les equacions característiques poden ésser obtingudes amb algoritmes uniformement convergents en D.

Però tot resta subordinat a la hipòtesi de trobar-se dins D. Per a fixar l'atenció en el cas més senzill ens referirem al problema restringit, en el qual (tota vegada que O i P′ estan a distància invariable tot el temps) l'entorn D es redueix a dos entorns I_0, I′ de centres O i P′. Si el punt P es troba dins I_0 podem deduir dels valors de les quantitats que defineixen el seu estat de moviment, si la condició de xoc és verificada o si no ho és.



Si ho és, se sabrà cert que, al cap de cert temps (del qual es pot donar el límit superior) P caurà sobre O.

Si no és verificada, això vol dir que no hi ha perill de xoc *mentre* P *no surti fora de* I_0, però pot perfectament succeir que P ixi de I_0 i que hi torni a entrar, satisfent aleshores, ja dintre altra vegada, les condicions de xoc.[1]

És una qüestió vital, potser difícil, però no inatacable i certament mereixedora d'estudi, la de previsió del xoc *a llarg termini* i pel sol examen de les dades inicials. Perquè la qüestió sigui realment vital, potser convé modificar-la lleugerament de manera que quedin respectades les condicions de seguretat asimptòtiques, és a dir, per a un

1. Cfr., per exemple, *Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps. (Acta Mat.* Tom XXX. 1906. Pàgs. 305-327.)

temps indefinidament llarg. Perquè, encara que el principi del moviment del centre de gravetat sigui cert i rigorós, la llei del dit moviment sols és identificable amb la de tres punts matemàtics que s'atrauen, segons la llei de Newton, amb la condició que les distàncies mútues d'aquestos siguin superiors a un cert límit ε que depèn de les dimensions i distribució de les masses dels tres cossos reals. La condició de seguretat referida al problema restringit ve caracteritzada, doncs, per les desigualtats

$$OP \geq \varepsilon, \; P'P \geq \varepsilon .$$

Per a valors (negatives) prou grans de la constant de forces vives, Hill va descobrir que poden ésser traçats dos ovals, cadascun dels quals comprèn un sol dels centres O, P', i de tal propietat que P roman indefinidament dintre d'un d'ells. El perill de xoc és, així, únic, i la condició de seguretat, en l'oval Ω_0 de centre O, v. g., és representat únicament per la desigualtat

$$OP \geq \varepsilon .$$

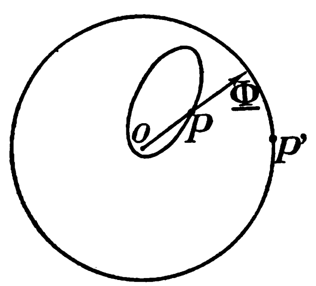
12. DUBTES CRÍTICS. JUSTIFICACIÓ INTUITIVA DE LA SEGURETAT.

Si hom es deixa conduir per l'analogia amb altres problemes de dos graus de llibertat, en particular i per exemple, el moviment d'un punt pesat en una superfície rodona, es presenta tot seguit el dubte que les trajectòries, en no ésser tancades (ja que no es tracti d'òrbites periòdiques) ompliran pràcticament tot el camp Ω_0. L'adverbi *pràcticament* vol dir la circumstància que, escollit un punt qualsevol M en Ω_0 i un número ε tan petit com es vulgui, tota trajectòria acaba en els seus desenrotllaments espirals indefinits per passar a una distància $< \varepsilon$ de M.

Si així fos, les condicions de seguretat, encara que es verifiquessin, no tindrien cap utilitat astronòmicament. Perquè, per una banda, les dades inicials sols es poden conèixer amb un cert grau d'aproximació (gran, però, limitada), i, per altra, les solucions periòdiques són, respecte de la totalitat de les solucions, una varietat que depèn d'un nombre menor de paràmetres (això en general, i més certament per al problema dels tres cossos). Així és que, per a valors indefinidament pròxims a unes inicials qualssevol, la majoria de les solucions que els corresponen ompliria pràcticament Ω_0 excloent tota seguretat asimptòtica del moviment.

Però tampoc convé abandonar-se massa al pessimisme. És perfectament possible que, segons siguin les dades inicials, les regions envaïdes a Ω_0 siguin diverses; de manera que pugui garantir-se la seguretat mitjançant determinades limitacions de les dades inicials.

La intuïció mecànica sembla donar base a semblant punt de vista (fig. 3).



En efecte : si no hi hagués el centre P', el punt P descriuria una òrbita el·líptica tota continguda dins Ω_0. La pertorbació de P', sempre en el problema restringit, pot ésser calculada en els seus efectes seculars per la manera de Gauss, assimilant P' a un anell circular que materialitzés l'òrbita de P'. La força pertorbatriu corresponent Φ (diferència entre l'atracció unitària en P i en O) seria radial per raó de simetria i *adreçada a l'exterior*. L'efecte general hauria d'ésser, doncs, el d'augmentar, mai el de disminuir, la distància mínima de O. Per això, si l'el·lipse no pertorbada satisfà les condicions de seguretat, a partir de les mateixes condicions inicials la seguretat no podria ésser més que major en el problema restringit.

Evidentment sols es tracta de conjectures basades sobre un procediment, clàssic i expressiu, sí, però no rigorós, per al càlcul de les pertorbacions seculars. De tota manera, la conclusió és encoratjadora, i per això em sembla convenient recomanar als estudiosos l'examen de la seguretat per exemple, i per començar, en el cas del problema restringit. És la qüestió que es posa *a priori* en la previsió a llarg termini.

Encara que avui la teoria d'Einstein ens porta a considerar la fórmula newtoniana com una primera aproximació, aquesta aproximació és tan gran que un resultat newtonià vàlid per a valors indefinidament grans del temps (ço que hem anomenat *asimptòtic)* té sempre un valor preciós, àdhuc en la nova mecànica.

El que vulgui discutir amb el necessari rigor matemàtic la més senzilla qüestió de seguretat, que és la indicada tot just, podrà mirar d'orientar-se invertint la qüestió, és a dir, estudiant els moviments, les trajectòries dels quals passin a distància $< \varepsilon$ de O i examinant quin sigui el camp que envaeixen en la varietat representativa dels estats de moviment. Si en aquesta varietat hi queden buits, aquests són regions de seguretat.

La qüestió ve lligada i subordinada a la prèvia regularització de les equacions del moviment. A la mateixa regularització resten igualment subordinades les modernes recerques que tenen per objecte l'estudi sintètic de la manera d'ésser de les solucions singulars, de llurs propietats asimptòtiques i estadístiques del conjunt. En aquesta direcció descoberta per Poincaré i per ell mateix vigorosament explorada, s'escauen les recerques notabilíssimes de Birkhoff sobre la distribució de les solucions periòdiques en el problema restringit dels tres cossos.[1]

Semblants consideracions poden atribuir-se al cas general, de manera que, si bé és cert que la regularització del problema dels tres cossos no n'és encara la solució completa, no és menys cert que, d'una banda, se'n pot treure un algoritme resolutiu vàlid sense condició a partir de dades inicials qualssevol i per tota la durada del moviment i fins més enllà (Sundman); i, d'altra banda, és una preparació indispensable per a compendre l'essència íntima del problema, per la qual cosa, si bé amb variades i diverses idees sobre els mitjans aptes per a assolir-ho, des dels temps més reculats fins als moderns, s'ha requerit la intervenció de la Matemàtica en l'estudi dels fenòmens naturals.

1. Cfr. *The restricted problem of three bodies.* (*Rend. del Circolo Mat. di Palermo.* Tom XXXIX. 1915. Pàgs. 265-334.)